TEMA 1: POTENCIAS Y RAICES CUADRADAS

1. POTENCIAS

Una potencia es una forma abreviada de expresar una multiplicación en la que todos los factores son iguales.

$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = \mathbf{2^5}$ Es una potencia.

La base es el factor que se repite (2), y **el exponente**, el número de veces que se repite (5).

$2 \cdot 2 = 2^2$ → Se lee «2 elevado a 2» o «2 al cuadrado».

$4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^3$ → Se lee «4 elevado a 3» o «4 al cubo».

$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^4$ → Se lee «3 elevado a 4» o «3 a la cuarta».

Una **potencia** es el resultado de multiplicar un número por sí mismo varias veces. El número que multiplicamos se llama **base**, el número de veces que multiplicamos la base se llama **exponente**.

$\mathbf{5^4 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 625}$

1.1 Potencias Especiales

- **0 elevado a cualquier número siempre da 0**

  $\mathbf{0^a = 0}$ "a" puede ser cualquier número natural que no sea 0

- **Cualquier número elevado a 0 siempre da 1**

  $\mathbf{a^0 = 1}$ "a" puede ser cualquier número natural que no sea 0

- **1 elevado a cualquier número siempre da 1**

  $\mathbf{1^a = 1}$

- **Cualquier número elevado a 1 es ese mismo número**

  $\mathbf{a^1 = a}$

1.2 Potencias de base 10

$\mathbf{10^1 = 10}$

$\mathbf{10^2 = 10 \cdot 10 = 100}$

$\mathbf{10^3 = 10 \cdot 10 \cdot 10 = 1.000}$

$\mathbf{10^4 = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10.000}$

$\mathbf{10^5 = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 100.000}$

$\mathbf{10^6 = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 1.000.000}$

Para calcular una potencia de base diez se escribe la unidad (1) seguida de tantos ceros como indique el exponente.

1.3 Operaciones con potencias

1.3.1 Producto de potencias de la misma base

$7^2 \cdot 7^4 \cdot 7^3 = 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 = 7^9$

$7^2 \cdot 7^4 \cdot 7^3 = 7^{2+4+3} = 7^9$

Para calcular el producto de potencias que tienen la misma base se pone la misma base y se suman los exponentes.

1.3.2 Cociente de potencias de la misma base

$2^8 : 2^5 = 2^{8-5} = 2^3$

Para calcular el cociente de potencias que tienen la misma base se pone la misma base y se restan los exponentes.

1.3.3 Potencia de una potencia

$(5^2)^4 = (5 \cdot 5)^4 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^8$

$(5^2)^4 = 5^{2 \cdot 4} = 5^8$

Para calcular potencia de una potencia se pone la misma base y se multiplican los exponentes.

1.3.4 Potencia de un producto

$(5 \cdot 2)^3 = 5 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 2 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 5^3 \cdot 2^3$

$(5 \cdot 2)^3 = 5^3 \cdot 2^3$

Potencia de un producto es el producto de las potencias.

1.3.5 Potencia de un cociente

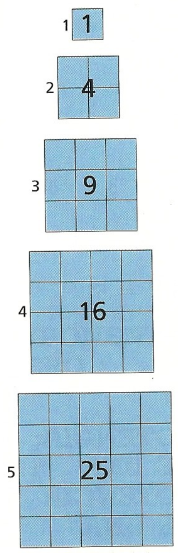
$(6 : 2)^3 = 6 : 2 \cdot 6 : 2 \cdot 6 : 2 = (6 \cdot 6 \cdot 6) : (2 \cdot 2 \cdot 2) = 6^3 : 2^3$

$(6 : 2)^3 = 6^3 : 2^3$

Potencia de un cociente es el cociente de las potencias.

1.4 Tabla de los Cuadrados Perfectos

Si intentamos dibujar cuadrados (figuras planas de 4 lados y 4 ángulos iguales), cuyos lados midan 1, 2, 3, 4, 5, … (números naturales), el área de esos cuadrados será:



lado = 1 área = $1^2 = 1 \cdot 1 = 1$

lado = 2 área = $2^2 = 2 \cdot 2 = 4$

lado = 3 área = $3^2 = 3 \cdot 3 = 9$

lado = 4 área = $4^2 = 4 \cdot 4 = 16$

lado = 5 área = $5^2 = 5 \cdot 5 = 25$

…

Los cuadrados que tienen de área: **1, 4, 9, 16, 25, 36, 49** …, son **cuadrados perfectos**

Así podemos calcular la tabla de los cuadrados perfectos:

$1^2 = 1 \cdot 1 = 1$

$2^2 = 2 \cdot 2 = 4$

$3^2 = 3 \cdot 3 = 9$

$4^2 = 4 \cdot 4 = 16$

$5^2 = 5 \cdot 5 = 25$

$6^2 = 6 \cdot 6 = 36$

$7^2 = 7 \cdot 7 = 49$

$8^2 = 8 \cdot 8 = 64$

$9^2 = 9 \cdot 9 = 81$

$10^2 = 10 \cdot 10 = 100$

$11^2 = 11 \cdot 11 = 121$

$12^2 = 12 \cdot 12 = 144$

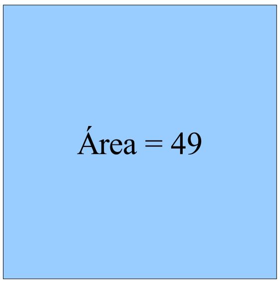
…

2. LA RAÍZ CUADRADA

Si el área de un cuadrado se calcula elevando al cuadrado el lado, también podemos calcular lo que mide el lado del cuadrado si sabemos su área.

Por ejemplo, si un cuadrado tiene de área 49, podemos calcular su lado buscando un número que elevado al cuadrado dé 49. Ese número es el 7, porque $7^2 = 49$.

Lo que acabamos de hacer es una nueva operación que vamos a llamar raíz cuadrada



Area = 49

lado = $\sqrt{49} = 7$, porque $7^2 = 49$

La raíz cuadrada es la operación "contraria" a elevar un número al cuadrado.

Para calcular la raíz cuadrada de un número, por ejemplo 64, debemos buscar un número que elevado al cuadrado nos dé 64. Ese número es 8, porque $8^2 = 64$

$\sqrt{64} = 8$ **porque** $8^2 = 64$

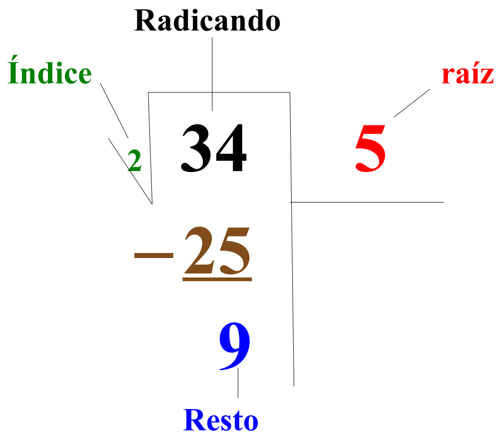
Si nos aprendemos la tabla de los cuadrados perfectos, podremos calcular raíces cuadradas.

Para calcular la raíz cuadrada de un número que no es cuadrado perfecto, buscamos en la tabla de los cuadrados perfectos cuál es el cuadrado perfecto que más se acerca:

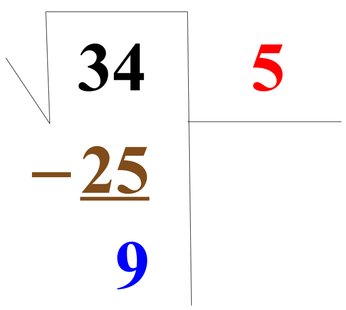
$$
\begin{array}{r|l}
\sqrt{34} & 5 \\
\hline
-\underline{25} & \\
9 &
\end{array}
$$

$1^2 = 1 \cdot 1 = 1$
$2^2 = 2 \cdot 2 = 4$
$3^2 = 3 \cdot 3 = 9$
$4^2 = 4 \cdot 4 = 16$
$5^2 = 5 \cdot 5 = 25$
$6^2 = 6 \cdot 6 = 36$
$7^2 = 7 \cdot 7 = 49$
$8^2 = 8 \cdot 8 = 64$
$9^2 = 9 \cdot 9 = 81$
$10^2 = 10 \cdot 10 = 100$
...

2.1 Partes de una raíz cuadrada



2.2 Prueba de la raíz cuadrada



$$\text{Radicando} = \text{raíz}^2 + \text{resto}$$

$$34 = 5^2 + 9$$

$$34 = 25 + 9$$

$$34 = 34$$

2.3 Algoritmo para calcular la raíz cuadrada de cualquier número natural

Existe una regla que nos permite calcular la raíz cuadrada entera de un número. Para calcular $\sqrt{190\,987}$ seguimos estos pasos.

1.º Dividimos el número en grupos de dos cifras empezando por la derecha. Como 190 987 tiene 6 cifras, se forman 3 grupos; por tanto, la raíz cuadrada es un número de 3 cifras, *cdu*.

```
√190 987 | c d u   ← Lugar para la raíz
```

2.º Calculamos la raíz cuadrada entera del primer grupo de la izquierda:

$$\sqrt{19} = 4$$

Este número es la cifra de las centenas, *c*, y lo colocamos en el primer lugar del espacio destinado para poner el resultado.

3.º Restamos al primer grupo el cuadrado de su raíz entera, 4^2, y unimos al resultado el siguiente grupo, es decir, "baja" el grupo, 09.

```
√190 987 | 4
 −16
   309
```

4.º Calculamos el doble del número obtenido como raíz, $4 \times 2 = 8$ y hallamos mentalmente el mayor número *d* tal que $8d \times d$ pueda restarse de 309 (82×2, 83×3...).

Para aproximar más fácilmente, podemos tantear tomando *d* como el cociente de la división entera de 30 entre 8, que es 3:

$$83 \times 3 = 249 \qquad 249 < 309$$

$$84 \times 4 = 336 \qquad 336 > 309$$

5.º El número 3 es la cifra de las decenas y lo colocamos a continuación del 4.

```
√190 987 | 43
 −16     | 83 × 3 = 249
   309
  −249
```

6.º Restamos a 309 el número 249 y añadimos al resultado el siguiente grupo, 87.

7.º Calculamos el doble del número de dos cifras obtenido como raíz, $43 \times 2 = 86$, y hallamos mentalmente el mayor número *u* tal que $86u \times u$ pueda restarse de 6 087 (862×2, 863×3...).

Para aproximar más fácilmente, podemos tantear tomando *u* como el cociente de la división entera de 608 entre 86, que es 7:

$$867 \times 7 = 6\,069 \qquad 6\,069 < 6\,087$$

$$868 \times 8 = 6\,944 \qquad 6\,944 > 6\,087$$

```
√190 987 | 437 ← Raíz
 −16     | 83 × 3 = 249
   309   | 867 × 7 = 6 069
  −249
   06087
```

8.º El número 7 es la cifra de las unidades y lo colocamos a continuación del 43. Restamos a 6 087 el número 6 069 y el resultado es el resto de la raíz.

$$\sqrt{190\,987} = 437 \qquad \text{Resto: } 18$$

Podemos comprobar que la suma del cuadrado de la raíz y el resto es igual al número.

$$437^2 + 18 = 190\,987$$

```
√190 987 | 437 ← Raíz
 −16     | 83 × 3 = 249
   309   | 867 × 7 = 6 069
  −249
   06087
  −6069
      18 ← Resto
```

En la siguiente página de internet puedes calcular la raíz cuadrada de cualquier número hasta de 6 cifras utilizando el algoritmo:

http://www.gobiernodecanarias.org/educacion/9/Usr/eltanque/todo_mate/raiz/raiz_6d_p.html